Електротехнички факултет, Београд

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2, домаћи задатак, одбрана

15. 06. 2020. год.	БРОЈ ИНДЕКСА:	САЛА:
Забрањена је употреба графитне („обичне") оловке. *Сваки тачан одговор доноси 3 поена.* Тест траје максимално **45** min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:	НАСТАВНА ГРУПА:

1. Израчунати неодређени интеграл $\int \cos 2x dx$.

$\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

2. Израчунати одређени интеграл $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$.

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sin 2x \, dx = 0$

3. Дата је диференцијална једначина $y' = y + 1$.

Заокружити њено опште решење:

а) $y = C_1 e^x + 1$; ***б)*** $y = C_1 e^x - 1$; ***в)*** $y = C_1 x + 1$;

г) $y = C_1 x + C_2 e^x$; ***д)*** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$;

(где су C_1 и C_2 произвољне реалне константе)

ђ) Ниједан од претходних израза није опште решење дате диференцијалне једначине

4. Наћи опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине $y'' - 2y' - 3y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$

$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

5. За које све вредности реалног параметра a конвергира ред $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{a+3}}$?

$a + 3 > 1$

$a > -2$

6. У зависности од реалног параметра a одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{bmatrix}$.

ранг $A = 1$

за свако $a \in \mathbb{R}$

7. За које вредности реалног параметра a је сагласан систем линеарних једначина:

$ax + y + z = 0$

$x - 2y + az = 0$?

$ax - 3y - z = 0$

за свако $a \in \mathbb{R}$

8. Збир сопствених вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, једнак је:

а) $3 + a$; ***б)*** $2a$; ***в)*** 0; ***г)*** 4; ***д)*** $a - 1$;

ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

9. Заокружити тачан одговор. Природних бројева мањих од 1000 у којима се не појављује цифра 1 има:

а) 728; ***б)*** 530; ***в)*** 400; ***г)*** 900;

д) ниједан од претходних бројева.

$9^3 - 1 = 728$

10. Дати су вектори $\vec{a} = (1,1,2)$ и $\vec{b} = (2,2,4)$.

Израчунати $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$

Електротехнички факултет, Београд

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2

ЈУНСКИ ИСПИТНИ РОК *15. јун 2020. год.*	Име и презиме, број индекса	сала

Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. Сваки задатак носи 14 поена. Испит се ради максимално **75** min.

1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*Сума*	*Оцена*

1. **[7+7]** Одредити неодређене интеграле: а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; б) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx$.

Одговор :

а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$

б) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{d(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5} = \ln(x^2-2x+5) + C$

2. **[14]** Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$.

Одговор :

$y'' - 2\cancel{x}y' - 3y = e^{2x}$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$

$y_{oh} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

$F(x) = e^{2x}$

$y_p = Ae^{2x}$

$y_p' = 2Ae^{2x}$

$y_p'' = 4Ae^{2x}$

$4A\cancel{e^{2x}} - 4A\cancel{e^{2x}} - 3Ae^{2x} = e^{2x}$

$-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$y_p = -\frac{1}{3}e^{2x}$

$y_o = y_{oh} + y_p$

$y_o = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$

3. [14] У зависности од вредности реалног параметра a, одредити ранг матрице $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

Одговор :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ 2 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 5 & a+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

за $a=5$ $\operatorname{rang} A = 2$

за $a \neq 5$ $\operatorname{rang} A = 3$

4. [14] Одредити карактеристични полином и сопствене вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Одговор :

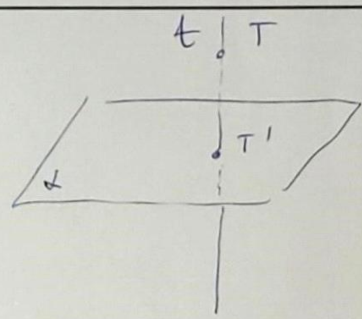
$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)+4\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

5. [10] Одредити пројекцију тачке $T(1,12,3)$ на раван $\alpha: 2x - y = 0$.

Одговор :



$\vec{n}_\alpha = (2, -1, 0)$

$t: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-12}{-1} = \dfrac{z-3}{0} = s$

$x = 2s + 1$

$y = -s + 12$

$z = 3$

$t \cap \alpha: \quad 2\cdot(2s+1) - (-s+12) = 0$

$5s - 10 = 0$

$s = 2$

$\boxed{T'(5, 10, 3)}$